УДК 538.931; 538.975

ТЕПЛОПЕРЕНОС В ТОНКИХ ПЛЕНКАХ С НЕЛИНЕЙНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Л.А.Уварова*, В.К.Федянин

Исследуется, как влияет нелинейность температуры на распространение электромагнитной волны в тонкой диэлектрической пленке с нелинейными свойствами. Конкретно, исследуется зависимость температурного профиля от мощности потока электромагнитной волны $\bar{P}_m$: $T(\bar{P}_m)$. Предполагается нелинейная зависимость от поля диэлектрической проницаемости пленки $\varepsilon(\omega/E)$, а коэффициент поглощения берется также в нелинейном виде $\kappa = \kappa_0 + \kappa_1 T + \kappa_1 T^2$. Основным результатом, полученным в работе, является вывод, что при существенно различном значении потоков энергии $\bar{P}_m$ $(m = 1,2,3,...)$ температура в центре пленки не меняется.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Heat Transfer through Thin Films with Nonlinear Properties

L.A.Uvarova*, V.K.Fedyanin

The influence of the nonlinearity of the temperature on the electromagnetic wave propagation in a thin dielectric film with nonlinear properties is investigated. Especially, the dependence of the temperature profile on the energy flux of the electromagnetic wave $\bar{P}_m$: $T(\bar{P}_m)$, is studied. The nonlinear dependence on the field of dielectric penetrability of the film $\varepsilon(\omega/E)$ is assumed, and the absorption coefficient is also taken in the nonlinear form $\kappa = \kappa_0 + \kappa_1 T + \kappa_1 T^2$. The main result of the paper is the conclusion that at essentially different values of the energy fluxes $\bar{P}_m$ $(m = 1,2,3...)$ the temperature does not change at the centre of the film.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

В настоящее время большое число теоретических и экспериментальных работ посвящено вопросам распространения нелинейных поверхностных волн в слоистых структурах [1]. В частности, для таких волн характерна неоднозначная зависимость эффективного волнового числа β от потока электромагнитной энергии P, что может быть исполь-

*Тверской политехнический институт

зовано в различных нелинейных оптических приборах. Вместе с тем стабильность работы всякого прибора зависит от многих параметров. В частности, приборы, работающие на жидких кристаллах, часто имеют небольшой рабочий диапазон по температуре. В настоящей работе выявляются температурные зависимости $T(P)$, имеющие место в тонких пленках, направляющих нелинейные поверхностные волны.

Рассмотрим тонкую слабопоглощающую пленку толщиной d $(-d/2 \leq z \leq d/2)$. Будем предполагать, что величина поглощенной энергии в такой пленке равна $\kappa\overline{P}$, где κ — коэффициент поглощения вещества пленки, $\overline{P} = P/M^2$, а P рассчитывается согласно [1] и зависит от типа поляризации поверхностной волны, соотношения между β и диэлектрической проницаемостью вещества пленки ε; ε может зависеть от электрического вектора. Будем аппроксимировать зависимость коэффициента поглощения от температуры квадратичной зависимостью

$$\kappa = \kappa_0 + \kappa_1 T + \kappa_2 T^2. \tag{1}$$

Температурный профиль в установившемся режиме может быть найден из стационарного уравнения теплопроводности

$$\chi \frac{d^2T}{dz^2} = \kappa\overline{P}, \tag{2}$$

где χ — коэффициент теплопроводности вещества пленки. В качестве краевых условий будем рассматривать условия первого и второго рода

$$1.\ T(\pm \frac{d}{2}) = T_0;\ 2.\ \frac{dT}{dz}(\pm \frac{d}{2}) = 0. \tag{3}$$

Интегрируя (1)—(2), получим ([2]):

$$T = t_1 - (T_1 - T_2)\, sn^2(\frac{z}{S}, k), \tag{4}$$

где $sn(x, k)$ — функция Якоби, $s = \left(\frac{6\chi}{\kappa_2\overline{P}(T_1 - T_2)}\right)^{1/2}$, $k^2 = \frac{t_1 - T_2}{T_1 - T_3}$, $T_3 \leq T_2 \leq T_1$, T_1, T_2, T_3 — корни уравнения

$$T^3 - \frac{3}{2}\frac{|\kappa_1|}{\kappa_2}T^2 + \frac{3\kappa_0}{\kappa_2}T - \frac{3C^2}{\kappa_2\overline{P}}, = 0 \tag{5}$$

C — постоянная интегрирования.

Используя теорему Виета и краевые условия (3.1), получим следующую систему для определения T_1, T_2, T_3, C:

$$T_1 + T_2 + T_3 = \frac{3|\kappa_1|}{2\kappa_2},\ T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3 = \frac{3\kappa_0}{\kappa_2},$$

$$\frac{3C^2\kappa}{\kappa_2 P} = T_1T_2T_3,\ T_0 = T_1 - (T_1 - T_2)\, sn^2(\frac{1}{2s}, k),$$

$$s = \left(\frac{6\chi}{\kappa_2 P(T_1 - T_3)}\right)^{1/2},\ k = \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_3}\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Введем безразмерные величины $\Theta_j = \frac{T_j}{T_0}$, $j = 1, 2, 3$, $\gamma_1 = \frac{|\kappa_1|}{\kappa_2 T_0}$, $\gamma_0 = \frac{\kappa_0}{\kappa_2 T_0^2}$, (полагая, что $T_0 \neq 0$). Из системы (6), а также из условий $\Theta_1 > 1$, $\Theta_{22} > 0$, $\Theta_3 > 0$, $\Theta_2 \le \Theta_1$ найдем, что если выполнены неравенства $2\sqrt{\gamma_0} \le \gamma_1 \le 1 + \gamma_0$, то могут реализоваться решения, удовлетворяющие неравенству

$$1 < \Theta_1 < \frac{\gamma_1}{2} - (\frac{\gamma_1^2}{4} - \gamma_0)^{1/1} \equiv \frac{\gamma_1}{2}\left[(1 - (1 - \frac{4\gamma_0}{\gamma_1^2})^{1/2}\right].$$

Если же выполнены условия: 1) $\gamma_0 \le 1/3$ или $\gamma_0 \ge 3$ и одновременно $\gamma_1 \ge 1 + \gamma_0$; 2) $\frac{1}{3} < \gamma_0 < 3$ и $\gamma_1 \ge \frac{4}{3}\sqrt{3\gamma_0}$, то безразмерная температура Θ_1 будет больше, чем $\frac{3}{4}\gamma_1 + (\frac{9}{16}\gamma_1^2 - 3\gamma_0)^{1/2}$. При этом безразмерная температура будет определяться формулой

$$\Theta_2 = \frac{3}{4}\gamma_1 - \frac{\Theta_1}{2} + (\frac{9}{16}\gamma_1^2 - \frac{3}{4}\Theta_1^2 + \frac{3}{4}\gamma_1\Theta_1 - 3\gamma_0)^{1/2}. \tag{7}$$

Пусть $T_2 = T_0$, тогда $\Theta_2 = 1$. В этом случае из (7) найдем температуру Θ_1:

$$\Theta_1 = \frac{3}{4}\gamma_1 - \frac{1}{2} + (\frac{9}{16}\gamma_1^2 + \frac{3}{4}\gamma_1 - 3\gamma_0 - \frac{3}{4})^{1/2}. \tag{8}$$

Температура Θ_3, в свою очередь, равна

$$\Theta_3 = \frac{3}{2}\gamma_1 - 1 - \Theta_1. \tag{9}$$

Из условия $\Theta_1 > 0$ и выражения (8) получим, что должны выполняться неравенства $1 + \gamma_0 < \gamma_1 < 2$ или $\gamma_1 > 2$, $\gamma_0 < 1$. Из условия $\Theta_3 > 0$ и выражений (8)—(9) найдем, что должно быть справедливым также неравенство $\frac{3}{2}\gamma_1 < \frac{2}{3} + 2\gamma_0$. Принимая во внимание неравенства, приведенные выше, получим, что параметры γ_0 и γ_1 должны удовлетворять условиям:

$$\frac{4}{3}\sqrt{3\gamma_0} \le \gamma_1 < \frac{2}{3} + 2\gamma_0, \quad \frac{1}{3} < \gamma_0 < 1.$$

При наложенном условии на границах пленки получим

$$sn^2\left(\frac{d}{2s}, k\right) = 1. \tag{10}$$

Решая уравнение (10), получим зависимость плотности потока энергии $\mathcal{P}$ от температуры в центре пленки $\Theta_1 T_0$. Такая зависимость будет иметь вид

$$\mathcal{P} = \frac{24\chi K^2(k)(1 + 2m)^2}{d^2\kappa_2 T_0(\Theta_1 - \Theta_3)}, \tag{11}$$

где $k = \dfrac{\Theta_1 - 1}{2\Theta_1 + 1 - 3/2\gamma_1}$, $K(k)$ — полный эллиптический интеграл Лежандра первого рода, $m = 0,1,2,...$ Температуры Θ_1, Θ_3 определяются параметрами задачи согласно формулам (8)-(9). Следовательно, одно и то же значение температуры может соответствовать различным значениям плотности потока энергии. Таким образом, увеличение в определенной пропорции потока энергии $\mathcal{P}$ не приводит к изменению максимальной температуры $\Theta_1 T_1$ слоистой системы. Такой вывод (наложение условия $T_2 = T_0$ не влияет на его общность) является существенным при всестороннем рассмотрении стабильности нелинейных свойств подобных систем. Вместе с тем в случае $T_2 = T_3$ (то есть при $k = 1$) имеет место неблагоприятный в данном смысле тепловой режим. Действительно, в этом случае вместо периодического решения (5) получим солитонное решение

$$T = T_2 + \frac{T_1 - T_2}{ch^2(\frac{z}{s})}, \tag{12}$$

где

$$T_1 = \left[\frac{3}{4}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^2 - \frac{4\kappa_0}{\kappa_2}\right]^{1/2}, \quad T_2 = \frac{3}{4}\frac{|\kappa_1|}{\kappa_2} - \frac{1}{2}T_1.$$

После подстановки (12) в граничные условия (3) получим следующее выражение для $\overline{P}$:

$$\overline{P} = \frac{24\chi}{d(T_1 - T_2)\kappa_2} \operatorname{arcch}^2 \left(\frac{T_1 - T_2}{T_0 - T_2}\right)^{1/2}. \tag{13}$$

Из (13) следует монотонная зависимость потока энергии от T_0.

Рассмотрим краевые условия теплоизоляции пленки (4). В этом случае после подстановки (5) в указанные краевые условия получим

$$sn(\frac{d}{2s}, k)\, cn(\frac{d}{2s}, k)\, dn\,(\frac{d}{2s}, k) = 0, \tag{14}$$

где $sn(x,k)$, $cn(x,k)$, $dn(x,k)$ — эллиптические функции Якоби. Величины T_2 и T_3 могут быть определены как функции температуры T_1 из первых двух условий системы (6):

$$T_{34} = \frac{3|\kappa_1|}{2\kappa_2} - \frac{T_1}{T_2} + \left(\left[\frac{3|\kappa_1|}{4\kappa_2} + \frac{T_1}{2}\right]^2 - \frac{3\kappa_0}{\kappa_2}\right)^{1/2}. \tag{15}$$

Из условия (14) (учитывая, что $dn(x, k) \neq 0$) получим зависимость $\overline{P}(T_1)$:

$$\overline{P} = \frac{24m^2\chi \cdot K^2\left(\frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_3}\right)}{d^2\kappa_2 \cdot (T_1 - T_2)}. \tag{16}$$

Таким образом, определив минимальное значение $\overline{P}_{min} = \overline{P}(m=1) \equiv \overline{P}_1$ по наиболее оптимальному значению температуры T_1, можно в дальнейшем получить согласно формуле (16) набор значений $\overline{P} = (\overline{P}_2, \overline{P}_3, \ldots)$, которые не приведут к изменению максимальной температуры T_1. Что касается солитонного решения (12), то оно не удовлетворяет краевым условиям идеальной теплоизоляции при конечной толщине пленки.

В работе [1] приведено большое число зависимостей потока энергии от эффективного волнового числа для различных реальных слоистых структур. Так, например, в системе «подложка» (s) — пленка (f) — оптически нелинейный самофокусирующий покровный слой (c), характеризующийся показателями преломления $n_c = n_s = 1{,}55$, $n_f = 1{,}57$, реализуются TE-поляризованные нелинейные поверхностные волны. При расчете предполагалось также, что длина электромагнитной волны $\lambda = 0{,}515$ мкм (лазер на ионах аргона), отношение $d/\lambda = 6$, а для оптически нелинейного покрытия справедлив закон Керра $n = n_c + \frac{1}{2} c\, \varepsilon_0\, |\vec{E}|^2$ (где локальная интенсивность $I = \frac{1}{2} c\, \varepsilon_0 |\vec{E}|^2$, c — скорость света, ε_0 — диэлектрическая постоянная, $\vec{E}$ — электрический вектор), $n_{2c} = 10^{-9}\,\frac{M^2}{Bm}$. Тогда, используя зависимость $P(\beta)$ и полагая $P_2 = 60\frac{Bm}{M}$, найдем, что данному значению потока энергии будут соответствовать два эффективных волновых числа для TE-волн, а именно $\beta_1 = 1{,}569$ и $\beta_2 = 1{,}57$. Полагая в формуле (16) $m = 3$, найдем $P_3 = \frac{9}{4} P_2 = 135\frac{Bm}{M}$. Данному значению мощности будут соответствовать волновые числа $\beta_1 = 1{,}569$ и $\beta_2 = 1{,}5695$. Таким образом, два качественно идентичных режима работы при существенном различии для значений потоков энергии не приводят к изменению температуры в центре пленки.

Литература

1. а) Михалаке Д., Назмитдинов Р.Г., Федянин В.К. — ЭЧАЯ, 1989, т.20, вып.1, с.198.

   б) Михалаке Д., Назмитдинов Р.Г., Федянин В.К., Уанг Р.П. — ЭЧАЯ, 1992, т.23, вып.1, с.122.
2. Уварова Л.А., Федянин В.К. — Математическое моделирование, 1990, т.2, 2. с.40.

Рукопись поступила 4 марта 1993 года.